



Biomehanika kardiovaskularnog sistema

Prof. dr Milan Kovačević

Motivacija

- Cirkulacija krvi u organizmu
- Pulsni talasi
- Mehanički rad srca
- Protok krvi kroz kapilare

Uvod

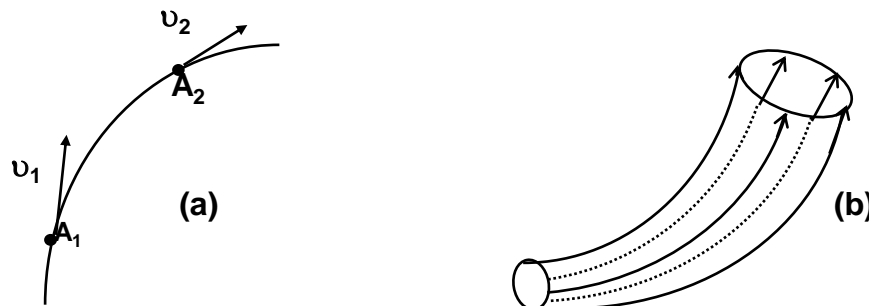
- U životnim procesima čoveka **cirkulacija tečnosti** i gasova je od izuzetne važnosti. Reč je o realnim fluidima kod kojih, zavisno od njihove funkcije, određene osobine dolaze do posebnog izražaja.
- Ovo predavanje je posvećeno fizičkim zakonitostima proticanja krvi kroz krvne sudove i funkcionisanju kardiovaskularnog sistema (KVS) čoveka.
- Na početnu ukratko su prikazane osnovne fizičke zakonitosti po kojima se vladaju idealni i realni fluidi.

Idelane tečnosti - hidrostatika

- Idealna tečnost predstavlja fizički model koji uvažava sledeće pretpostavke:
 - *tečnosti su nestišljive*
 - *ne postoji unutrašnje trenje*
- Hidrostatika – proučava osobine tečnosti u mirovanju.
- Tečnost se nalazi u mirovanju ako sve spoljne sile deluju normalno na njenu površinu.
 - *Paskalov zakon* ($Pa = N/m^2$) – pritisak spoljnih sila se prenosi kroz tečnost u svim pravcima podjednako
$$p = F/S$$
 - *Hidrostatički pritisak* ($1 \text{ mmHg} = 133 \text{ Pa}$) – pritisak u tečnostima usled njene težine
$$p = \rho gh$$

Hidrodinamika

- Tečnosti su neprekidne (kontinualne) sredine.
- Model: fluid se sastoji od sićušnih samostalnih celina koje nazivamo čestice (delići) i koje, slično molekulima, imaju osobinu da se ponašaju kao samostalne celine.
- U tečnostima se međusobni položaj čestica može menjati sa vremenom – strujna linija.
- Skup strujnih linija koje prolaze kroz svaku tačku proizvoljne površine u prostoru čine strujnu cev.



Strujna linija (a) i strujna cev (b).

Osnovne veličine

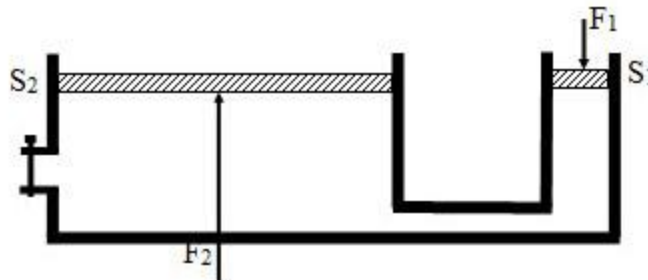
- gustina: $\rho = m/V$
- pritisak:
 - statički: $p = F/S$
 - hidrostatički: $p = \rho gh$
 - hidrodinamički: $p = \rho v^2/2$
- protok: $Q = \Delta V / \Delta t = S \cdot v$
- viskoznost: μ ili η

Sila i pritisak u fluidima

- Kroz čvrsta tela i fluide sila se različito prenosi. Kada sila deluje na jedna kraj čvrstog tela, sila se prenosi na drugi kraj brz promene pravca delovanja.
- Kod fluida, zbog sposobnosti da teče, sila se ravnomerno prenosi u svim pravcima. Zato je pritisak u bilo kojoj tački fluida u mirovanju isti u svim pravcima.
- Sila kojom fluid deluje na neku površinu je normalna na tu površinu. Fluid koji se nalazi u posudi deluje silom na sve delove posude koji su u kontaktu sa fluidom. Fluid takođe deluje silom i na bilo koje telo koje je ubačeno u njega.
- Atmosferski pritisak je sila po jedinici površine koju na neku površinu vrši težina vazduha u atmosferi Zemlje iznad te površine. Atmosferski pritisak na svaki deo našeg tela iznosi 10N na 1cm^2 . Isti pritisak se nalazi i u organizmu i tkivima pa su ovi pritisci u ravnoteži.

Paskalov princip

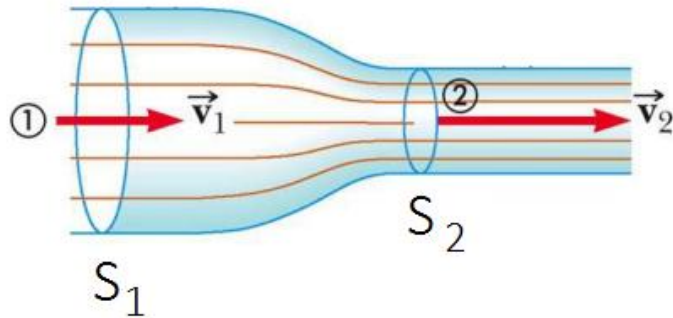
- Spoljašnji pritisak koji deluje na zatvorene tečnosti i gasove prenosi se podjednako u svim pravcima.
- U nestišljivom (nekompresibilnom) fluidu povećanje pritiska u bilo kojoj tački se prenosi nesmanjeno na sve ostale tačke u fluidu. Ovo je poznato kao *Paskalov princip*.
- Kada sila, intenziteta F_1 deluje na tečnost površine S_1 , pritisak u tečnosti se povećava za vrednost $p=F_1/S_1$. Kako je pritisak u fluidu svuda jednak, sila intenziteta F_2 deluje na površinu S_2



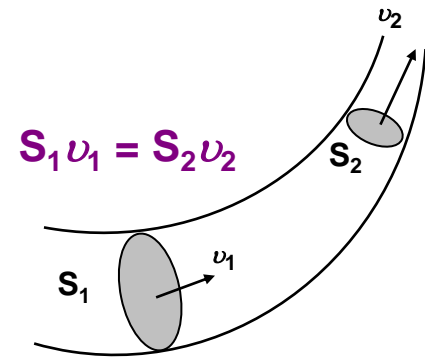
- Tada je $F_1/S_1=F_2/S_2$.

Jednačina kontinuiteta

- JEDNAČINA KONTINUITETA. Na osnovu *zakona o održanju mase* ($m = \text{const.}$) kroz bilo koji poprečni presek S strujne cevi mora da prođe ista količina tečnosti u jedinici vremena (*protok* Q)



$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

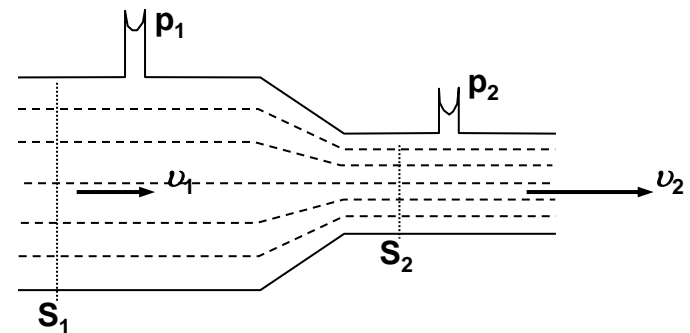
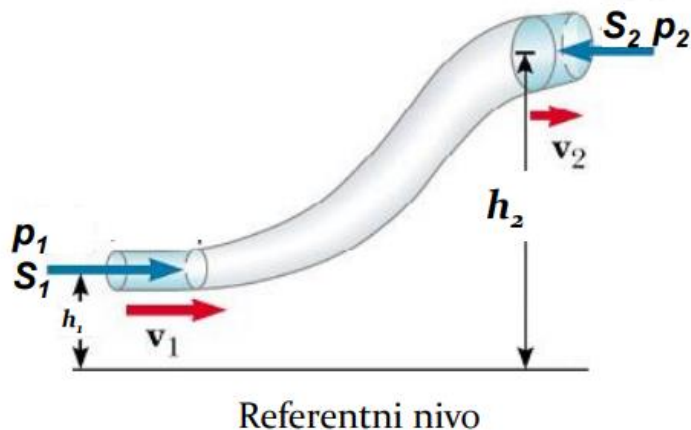


$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = S \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t} = S \cdot v = \text{const.}$$

Bernulijeva jednačina

- BERNULIJEVA JEDNAČINA. Osnov za dobijanje *Bernulijeve jednačine* je zakon o održanju energije, po kome ukupna mehanička energija, odnosno zbir potencijalne i kinetičke energije određene količine tečnosti, tokom njenog kretanja kroz strujnu cev, ostaje nepromenjena.

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const.}$$

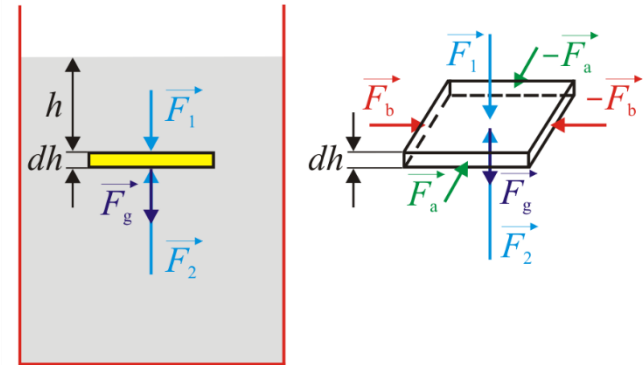


$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2},$$

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2).$$

Hidrostatički pritisak

- Hidrostatiki pritisak je pritisak uzrokovan samom težinom fluida. U tečnostima raste pritisak sa dubinom. Sila koja deluje na telo koje se nalazi u tečnosti je veća na donji deo tela od sile koja deluje na gornji deo. Ova sila se naziva *sila potiska*.
- Posmatrajmo tečnost konstantne gustine ρ koja se nalazi u stanju mirovanja u sudu prikazanom na slici.
- Kako je tečnost u ravnoteži, onda je i svaki zapreminski element iste takođe u ravnoteži. Neka jedan takav element tečnosti ima oblik pločice debljine dh sa stranicama površine S i neka se nalazi na dubini h u odnosu na površinu tečnosti. Horizontalne sile pritiska se uravnotežavaju. U vertikalnom pravcu pored sila pritiska F_1 i F_2 deluje i gravitaciona sila F_g uočenog elementa:
 - $F_1 + F_g = F_2$
 - $F_1 = pS$, $F_2 = (p + dp)S$, $F_g = mg = \rho Vg = \rho Sdh g$
 - $dp = \rho g dh$



$$\int_{p_{atm}}^p dp = \rho g \int_0^h dh$$

$$p = p_{atm} + \rho gh$$

Hidrodinamički pritisak

- Pritisak fluida koji se kreće se naziva *hidrodinamički pritisak* i predstavlja kinetičku energiju fluida po jedinici zapremine, ili matematički

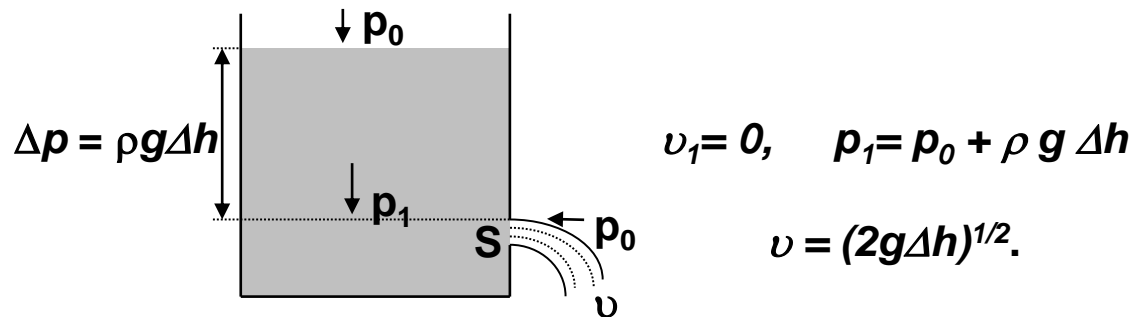
$$\frac{E_k}{V} = \frac{1}{2V} \rho V v^2 = \frac{\rho v^2}{2}$$

Primena Bernulijeve jednačine

- Toričelijeva teorema
- Dejstvo pritiska krvi na aneurizam
- Formiranje mehura vazduha u otvorenom krvnom sudu

Toričelijeva teorema

- Posmatrajmo rezervoar u kome se nalazi tečnost zanemarljive viskoznosti. Pri dnu se nalazi vrlo mali otvor površine S kroz koji ističe tečnost. Brzina isticanja tečnosti zaviće samo od razlike pritiska Δp .



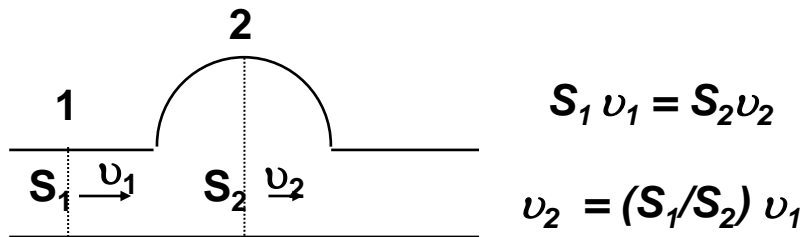
Primena Toričelijeve teoreme na isticanje tečnosti iz suda.

- Toričelijeva teorema može poslužiti za izračunavanje površine otvaranja valvule.

$$S = \frac{Q}{v} = \frac{Q}{\sqrt{2 \frac{\Delta p}{\rho}}}$$

Dejstvo pritiska na aneurizam

- Posmatrajmo krvni sud na kome se nalazi aneurizam. Jednačina kontinuiteta tvrdi da će proizvodi poprečnog preseka krvnog suda i brzine proticanja krvi na mestima 1 i 2 biti isti: $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Pošto je $S_1 < S_2$ sledi da je $v_2 < v_1$.



Krvni pritisak povećava aneurizam formiran u krvnom sudu.

$$p_1 + \frac{\rho \cdot v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot v_2^2}{2},$$

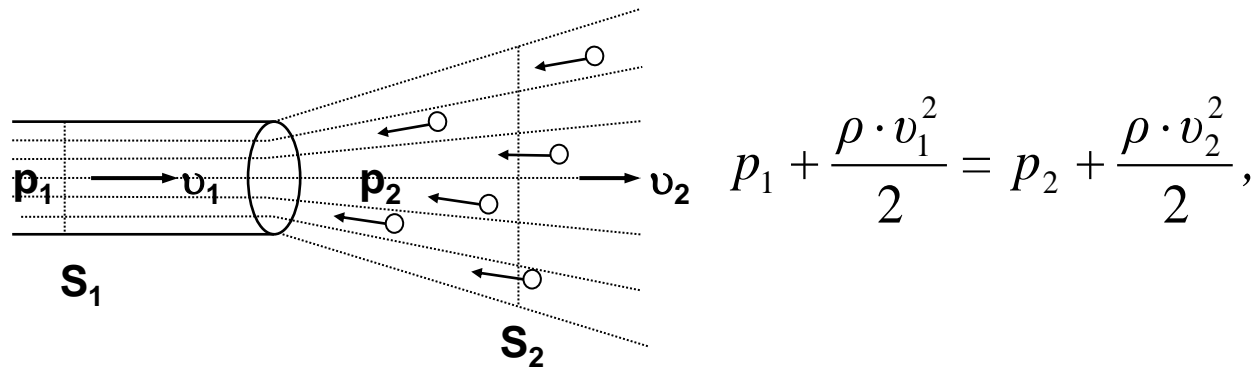
$$p_2 = p_1 + \rho \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} = p_1 + \rho v_1^2 \frac{1 - (S_1/S_2)^2}{2}$$

- **Zaključak: $p_2 > p_1$**

Formiranje mehura vazduha u otvorenom krvnom sudu

- Kada se preseče arterijski krvni sud, mlaz krvi šiklja i njegov poprečni presek raste. Kako se $S_2 > S_1$, na osnovu jednačine kontinuiteta zaključujemo da je $v_2 < v_1$, a na osnovu Bernulijeve jednačine da je $p_2 > p_1$.

- $S_1 v_1 = S_2 v_2$



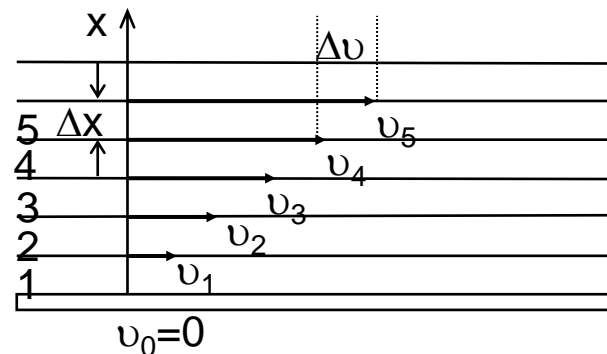
Kretanje molekula vazduha ka mestu manjeg pritiska – formiranje vazdušnog mehura.

- Molekuli vazduha, koji se nalaze u blizini preseka, kreću se sa mesta višeg ka mestu nižeg pritiska i ulaze u krvni sud. Ovi molekuli formiraju u krvnom sudu vazdušni mehur.

Realne tečnosti – Njutnov zakon viskoznosti

- Kod realnih tečnosti u kretanju javlja se unutrašnje trenje - *viskoznost*, koje dovodi do slojevitog - *laminarnog* toka. Ako brzine nisu velike, slojevi klize jedni preko drugih.
- Sila viskoznog trenja između slojeva homogene tečnosti, koja deluje suprotno od smera kretanja tečnosti definisana je *Njutnovim zakonom viskoznosti*.

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$



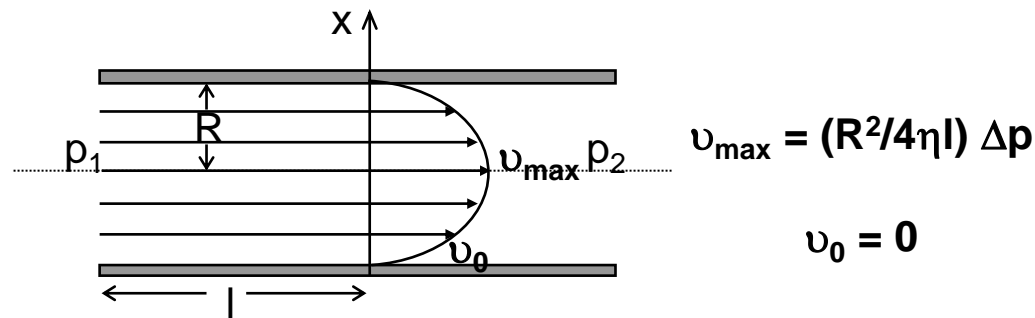
$$\eta = \frac{F / S}{\Delta v / \Delta x}$$

Karakteristike laminarnog kretanja tečnosti preko ravne podloge.

Kretanje viskozne tečnosti kroz usku cev

- Srednja brzina: $v=(v_0+v_{\max})/2=(R^2/8\eta l)\Delta p$
- $\Delta p=p_1-p_2$ je razlika pritiska na krajevima cevi, a R poluprečnik cevi.
- **Profil brzine tečnosti :**

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) = \frac{R^2 \Delta P}{4\eta L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



Kretanje viskoznog fluida kroz uzanu cev.

Poazejev zakon

- Protok viskozne tečnosti definisan je opštom relacijom: $Q=S \cdot v$
- Protok možemo izračunati množenjem brzine $v(r)$ i elementa površi cilindrične cevi $2\pi r dr$, i integracijom po r u granicama od 0 do R .

$$Q = \int_0^R \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) 2\pi r dr$$

$$Q = \int_0^R \frac{\pi \Delta P}{2\eta L} (rR^2 - r^3) dr = \frac{\pi \Delta P}{2\eta L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta L}$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P_1 - P_2)$$

$$Q = \frac{\Delta p}{\frac{\pi R^4}{8\eta L}} = \frac{\Delta p}{R_H}$$

Viskoznost disperzionih sredina

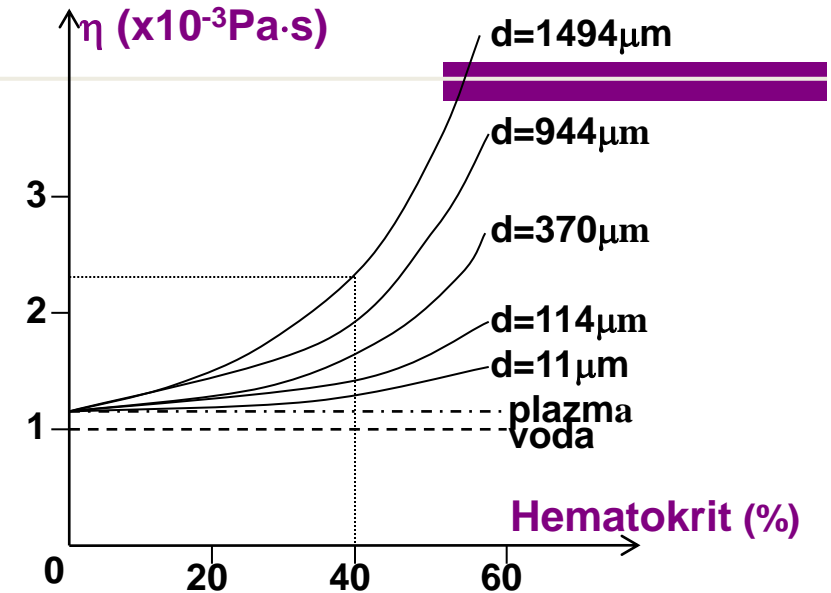
- Disperzioni sistemi. Ako su u kontinualnoj masi neke supstancije ravnomerno raspoređeni delići druge supstancije, takva sredina predstavlja *disperzni sistem*. Pri malim koncentracijama delića ($c < 3\%$), koeficijent viskoznosti disperzionog sistema se može predstaviti Ajnštajnovom jednačinom viskoznosti

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 + k \cdot c),$$

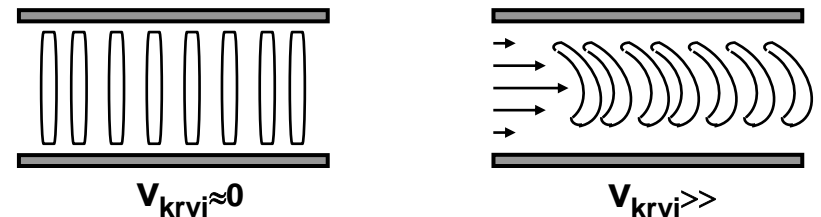
gde je vrednost konstante $k = 2,5$.

Viskoznost krvi

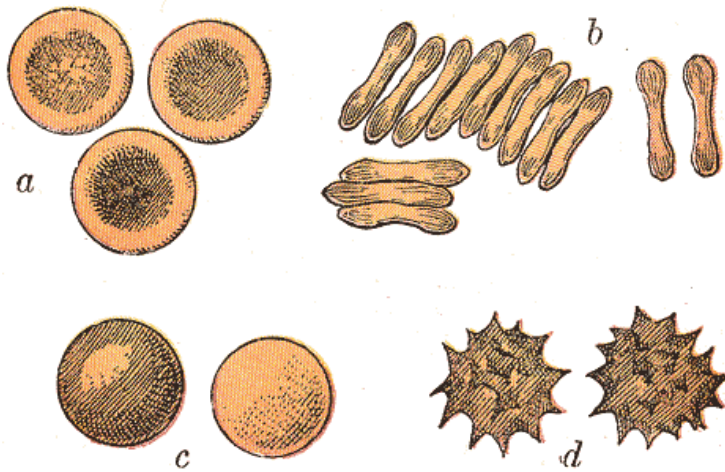
- Krv je disperzna sredina visokoprocenatne koncentracije, jer je *hematokrit* krvi, bezdimenzioni odnos zapremine svih krvnih ćelija i zapremine čitave suspenzije, *oko 40%*.



Zavisnost koeficijenta viskoznosti krvi od dijametra krvnog suda.



Efekt zida pri proticanju krvi kroz uzane cevi (i krvne sudove).

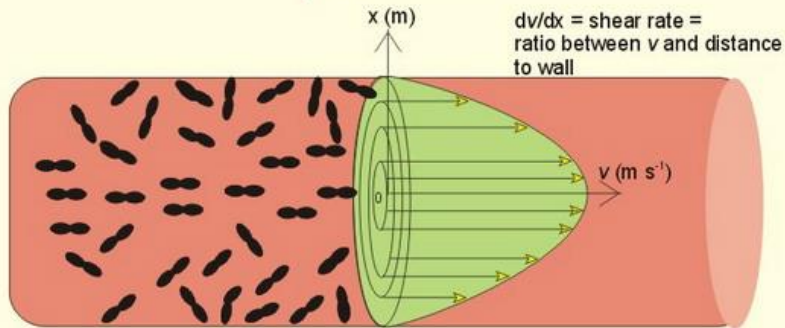


Human red blood cells.

- a. Seen from the surface.
- b. Seen in profile and forming rouleaux.
- c. Rendered spherical by water.
- d. Rendered crenate by salt solution.

Inner Friction = Viscosity (η) of blood

η in Pascal seconds



Tangential force (F) per area (A) unit: $F/A = \eta * dv/dx$

Erythrocytes with largest velocity in the axial stream
 $F/A = \text{shear stress (tangential force per area unit)}$

Fig. 8-4

KMc

Small Diameter Effect On Viscosity
 (Fåhræus-Lindquist): Low viscosity in small vessels

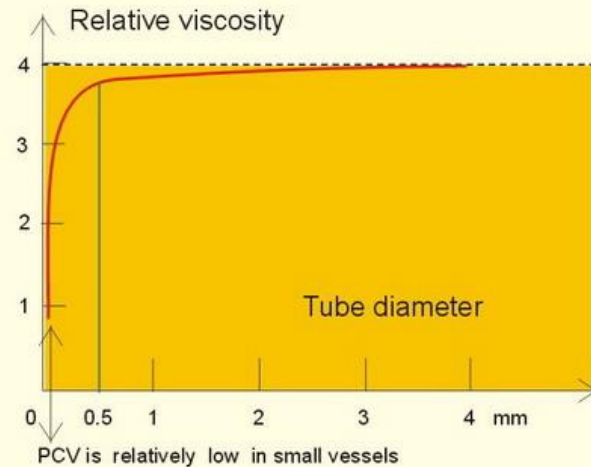


Fig. 8-6

KMc

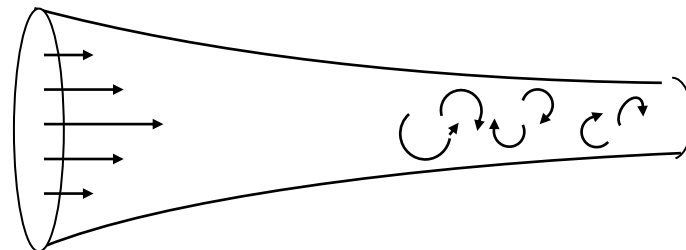
Laminarno i turbulentno kretanje

- Kretanje idealnih tečnosti (protok tečnosti) odvija se bez trenja. Kod realnih tečnosti, molekuli se međusobno privlače, pa se relativnom kretanju između molekula tečnosti protivi sila trenja, ili sila viskoznosti.
- Pri laminarnom strujanju pojedini delići tečnosti ne prelaze iz jedne lamine u drugu, već ostaju u okviru jednog sloja- lamine, krećući se brzinom karakterističnom za taj sloj. Brzina je najveća u centru cevi i smanjuje se ka zidovima. Uz sam zid cevi brzina tečnosti je enula.
- Ako brzine pojedinih slojeva postanu velike doćiće do mešanja slojeva, što se manifestuje kao turbulencija.

$$R_e = \frac{2QR}{\eta_k S} = \frac{QD\rho}{\eta S}$$

$$S = \pi R^2$$

$$\eta_k = \eta / \rho$$



Prelaz laminarnog u turbulentni tok.

$$R_e = \frac{2Rv}{\eta_k} = \frac{Dv\rho}{\eta}$$
$$D = 2R$$

D - prečnik cevi
R – poluprečnik cevi

Turbulentno kretanje - posledice

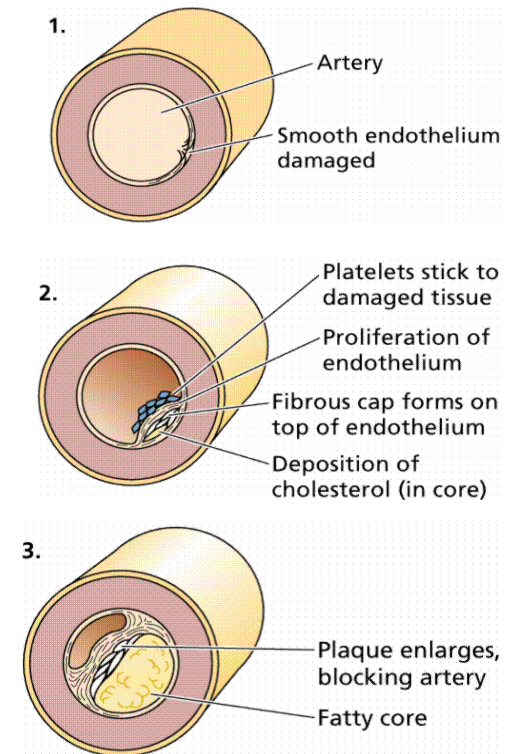
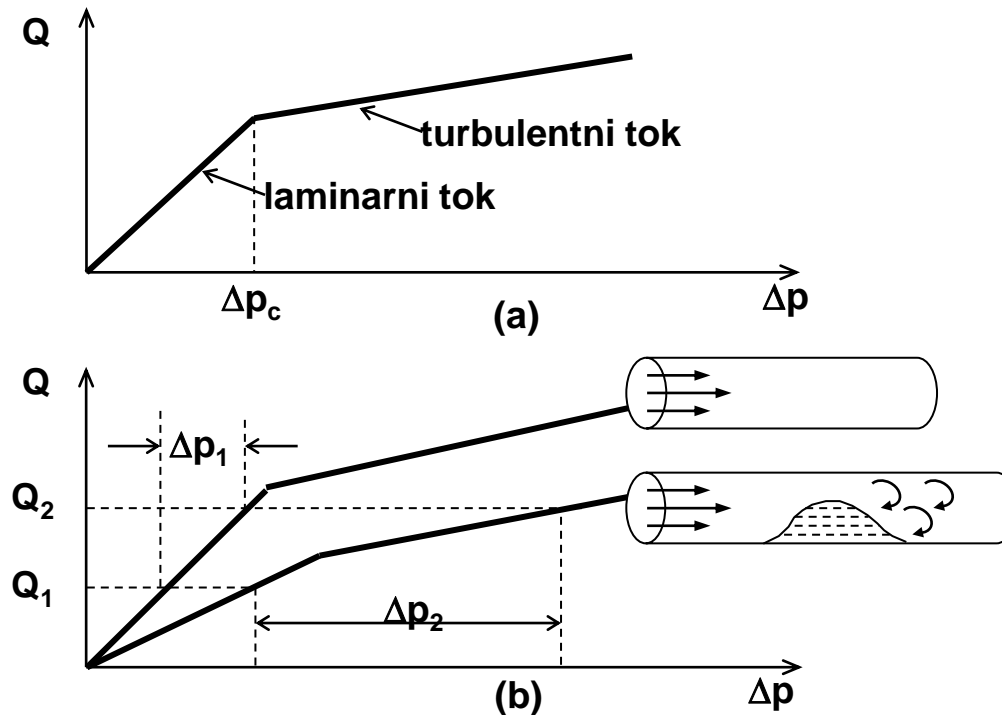
- Proporcionalnost između protoka i razlike u pritiscima narušena je.
- Za razliku od bešumnog laminarnog kretanja, turbulencije izazivaju mehaničke vibracije zidova krvnih sudova koje se mogu registrovati stetoskopom.
- Energija potrebna za kretanje tečnosti veća je pri turbulentnom nego pri laminarnom kretanju.

Rejnoldsov broj

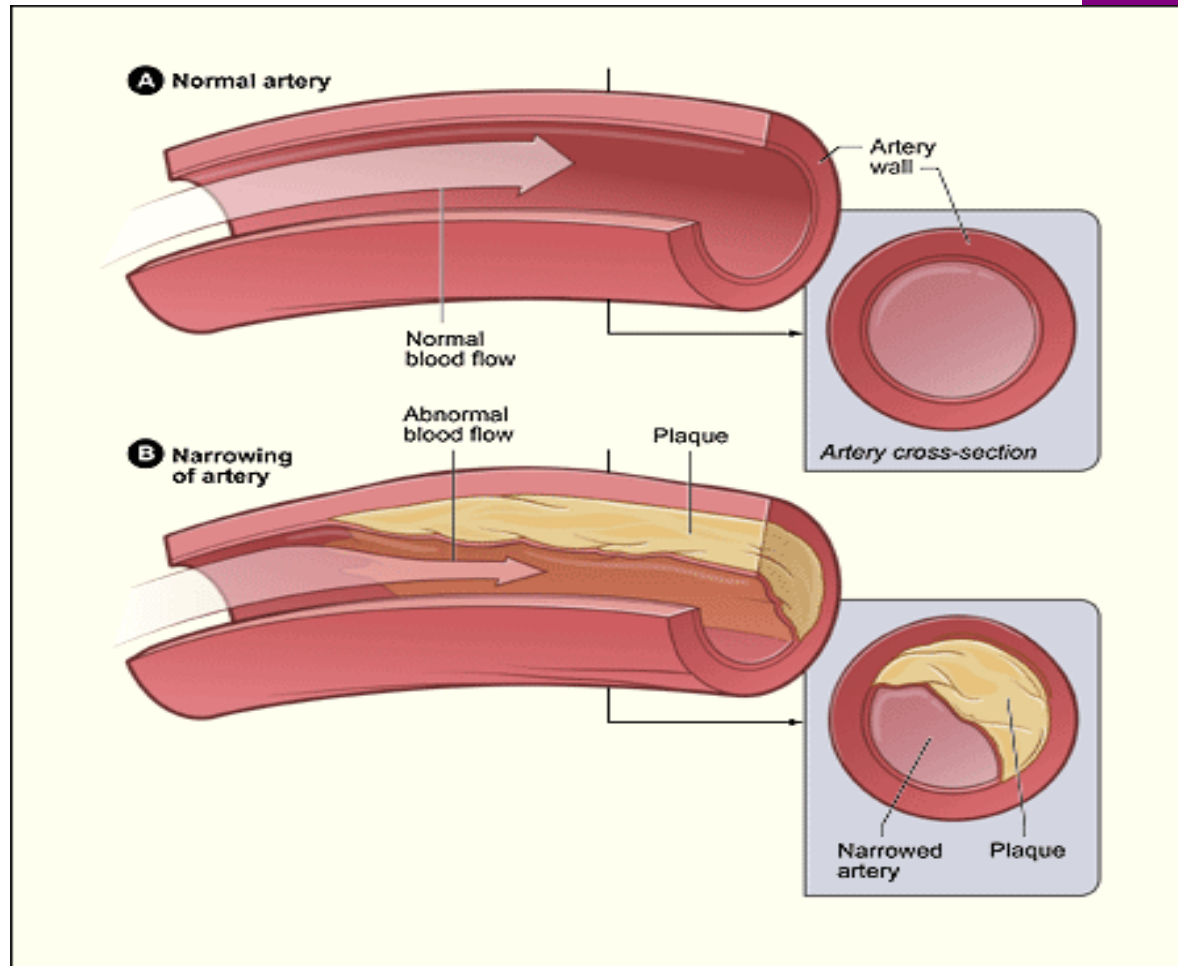
- Eksperimenti su pokazali da je za većinu homogenih tečnosti strujanje laminarno ako je $Re < 2000$.
- To važi i z akrv, kod koje je eksperimentalno određeno približna vrednost kritičnog Rejnoldsovog broja $Re = 1960 \pm 160$, pri kojoj tok krvi prelazi iz laminarnog u turbulentan.
- U proračunima se za vrednost kritičnog Rejnoldsovog broja krvi obično uzima $Re = 2000$.

$$Q=f(\Delta p)$$

- Pri turbulentnom kretanju troši se više energije nego pri laminarnom.



Normalna i sužena arterija



Normalna i delimično zapušena arterija

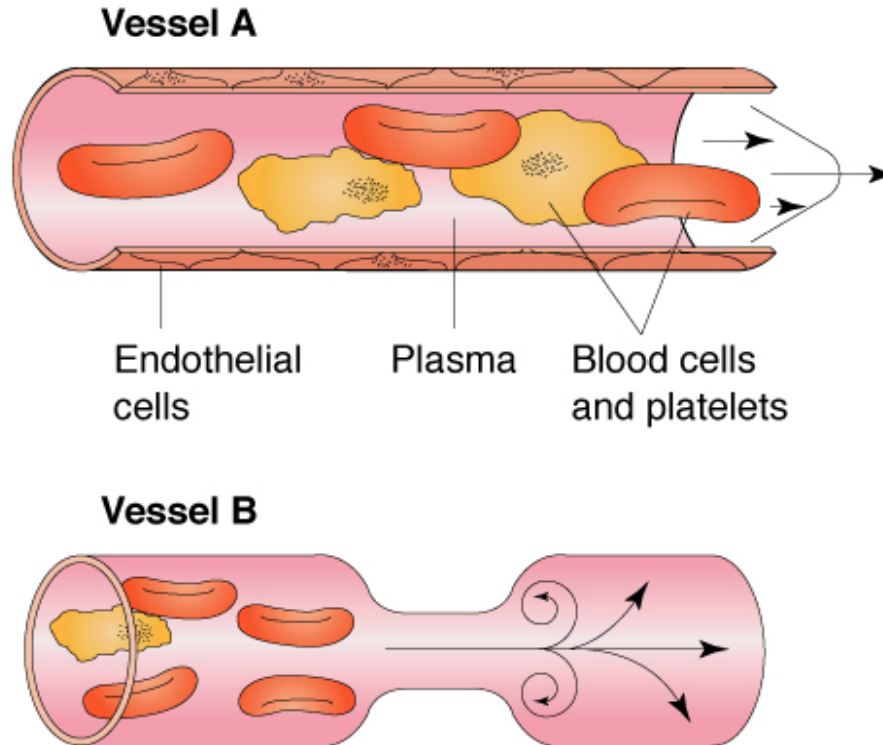


Figure 23-5 Laminar and turbulent flow in blood vessels. Vessel **A** shows streamlined or laminar flow in which the plasma layer is adjacent to the vessel endothelial layer and blood cells are in the center of the bloodstream. Vessel **B** shows turbulent flow in which the axial location of the platelets and other blood cells is disturbed.

Stent rešenje

- 1 Catheter is inserted into coronary artery



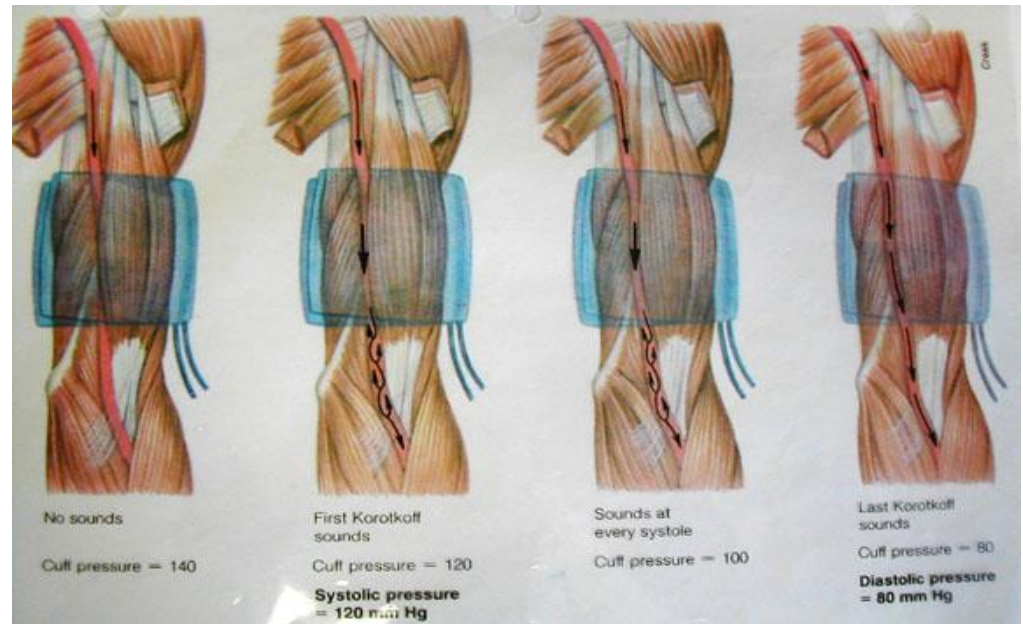
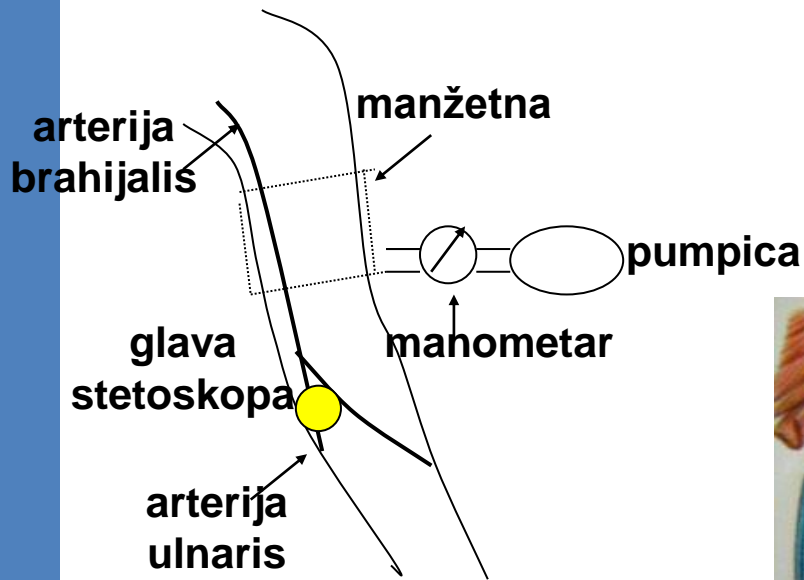
- 2 Balloon is inflated, causing stent to expand



- 3 Balloon is removed, leaving wire mesh stent holding artery open



Merenje krvnog pritiska auskultacijskom metodom



Kardiovaskularni sistem (KVS)

- KVS ima funkciju transportnog sistema u organizmu. Njime se doprema "gorivo" iz hrane i kiseonik iz vazduha u ćelije, gde dolazi do sagorevanja i oslobađanja energije, potrebne za funkcionisanje organizma. Istovremeno, krv odnosi produkte sagorevanja iz ćelije (CO_2 i H_2O).

Kardiovaskularni sistem čine:

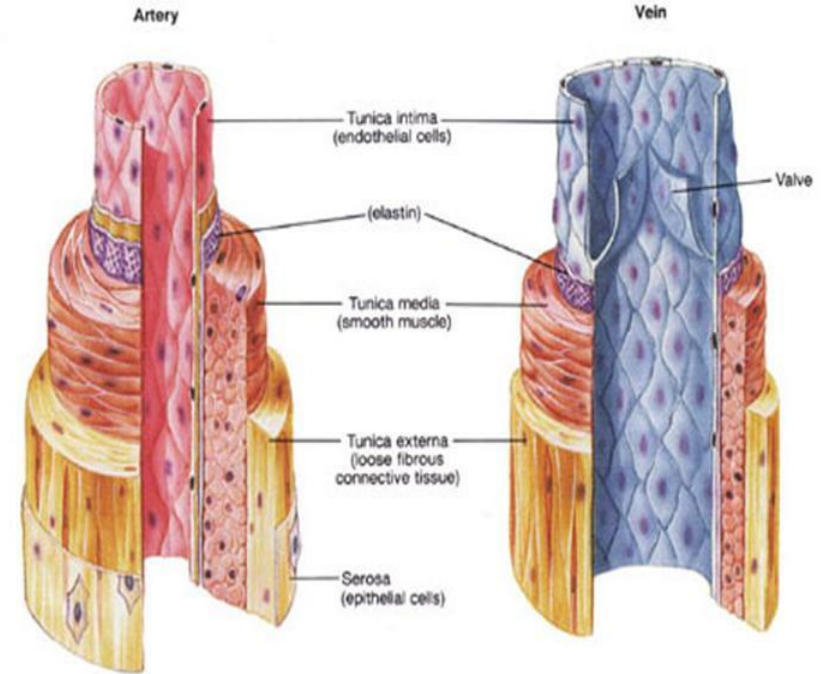
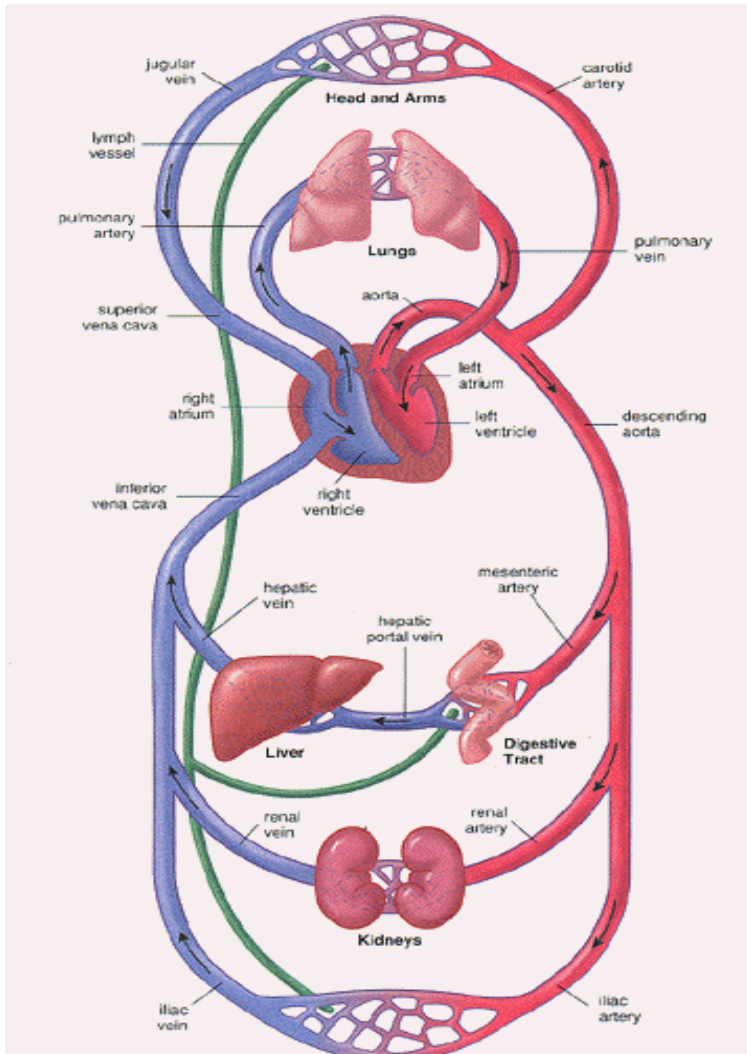
- krv
- krvni sudovi
- srce

Krv - podsetnik

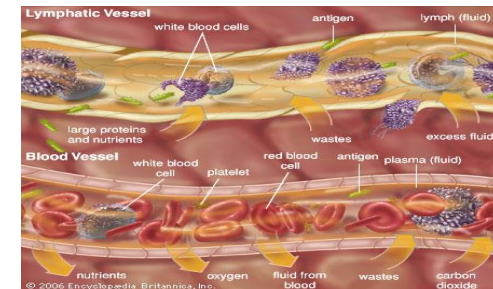
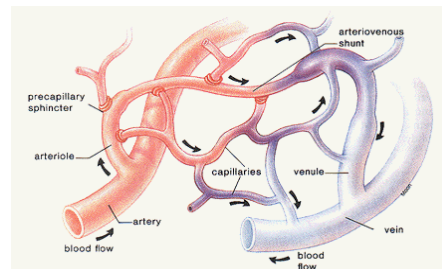
- ✓ Krv predstavlja suspenziju krvnih tela u plazmi. Masa krvi iznosi oko 7% ukupne mase organizma. Sastoji se od nekoliko komponenata:
 - ❑ Plazma - prozirna tečnost zapremine oko 55%
 - ❑ Eritrociti - bikonkavni diskovi dijametra oko 8 μm , zapremine 40 - 50% (M - oko $5,2 \times 10^6$ eritrocita/ mm^3 , F - oko $4,7 \times 10^6$ eritrocita/ mm^3)
 - ❑ Leukociti – oblika amebe dimenzija od 9 - 15 μm , zapremina ispod 1% (oko 8000 leukocita/ mm^3 krvi)
 - ❑ Krvne pločice - dijametar od 1 - 4 μm , zapremina oko 0,13% (3×10^5 pločica/ mm^3)

KRVNI SUDOVI

Krvni sudovi: arterije, arteriole, kapilare, venule, vene.



Source: Fox, Stuart I. Human physiology 4th edition, Brown Publishers

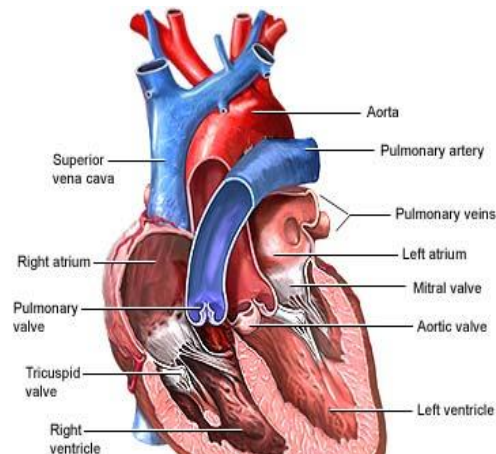
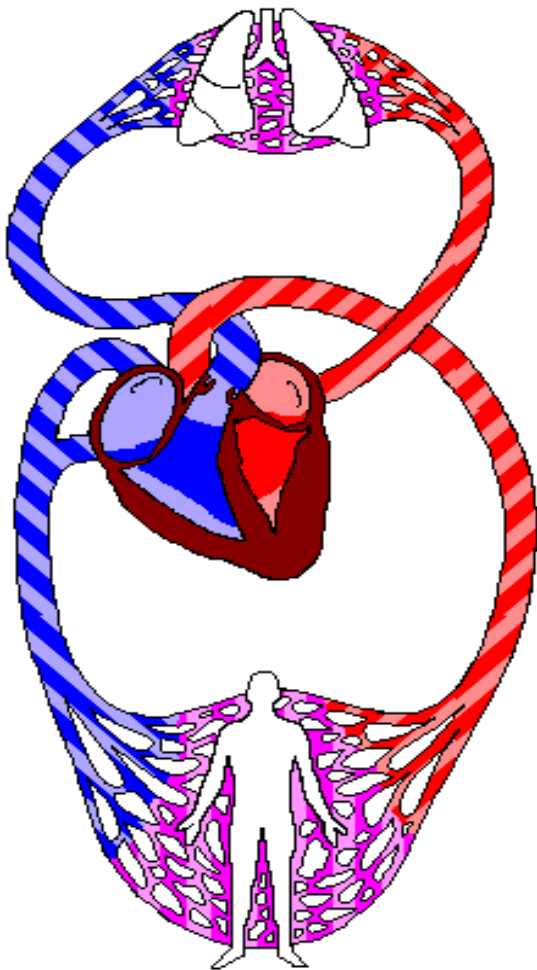


SRCE I KRVOTOK

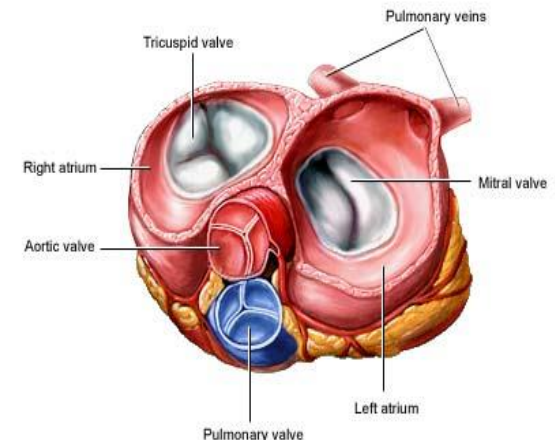
Srce je dvostruka pumpa, koja pumpa krv kroz dva cirkulatorna sistema: pulmonalni (mali) (~20%) i sistemski (veliki) krvotok (~80%).+Srce se kontrahuje (kuca) oko 70 puta u minutu i oko 30 miliona puta tokom jedne godine!

Energija potrebna za istiskivanje krvi u krvotok dobija se kontrakcijom mišića atrijuma, odnosno ventrikula.

Smer kretanja krvi obezbeđuju srčani zalisci (valvule), od kojih se jedan par nalazi između atrijuma i ventrikula (mitralna i triskupidna valvula), a drugi je između ventrikula i aorte, odnosno pulmonalne arterije.



adam.com



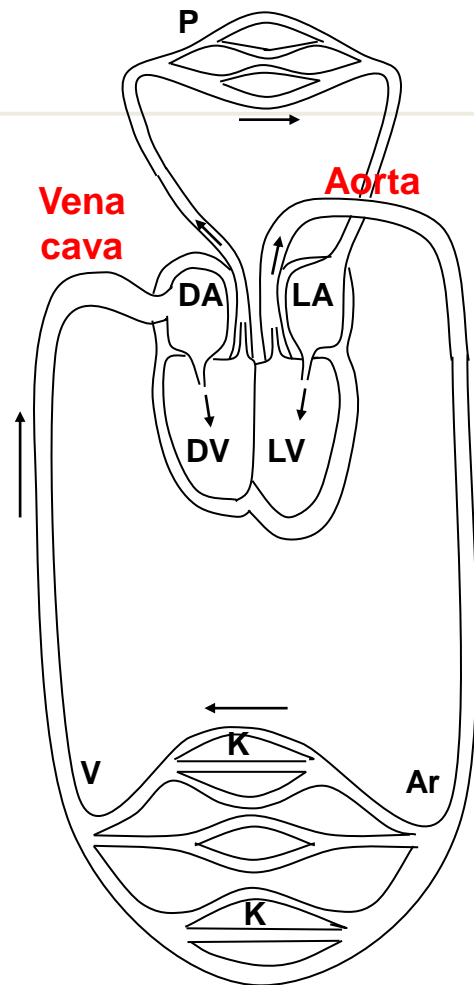
adam.com

SRCE I KRVOTOK

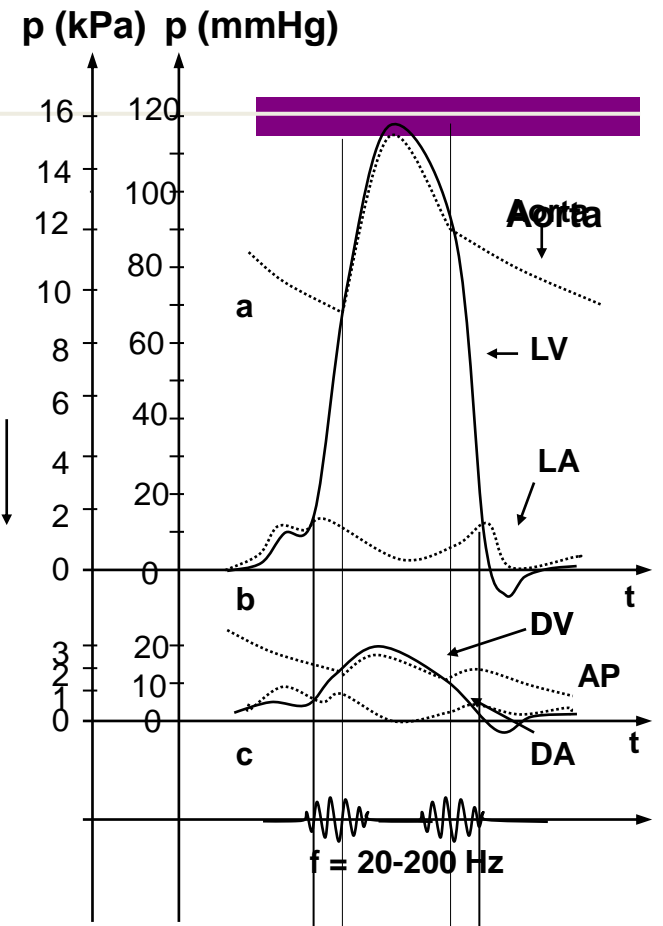
Proticanje krvi ima uvek isti smer.

Jedan ciklus:

1. Levi atrijum (LA)
p oko 1 kPa (7,5 mm Hg)
2. Levi ventrikul (LV)
p oko 16 kPa (120 mmHg)
3. Protok krvi kroz veliki krvotok
4. Desni atrijum (DA)
p oko 0,8 kPa (6 mmHg)
5. Desni ventrikul (DV)
p oko 3 kPa (20 mmHg)
6. Protok krvi kroz mali krvotok

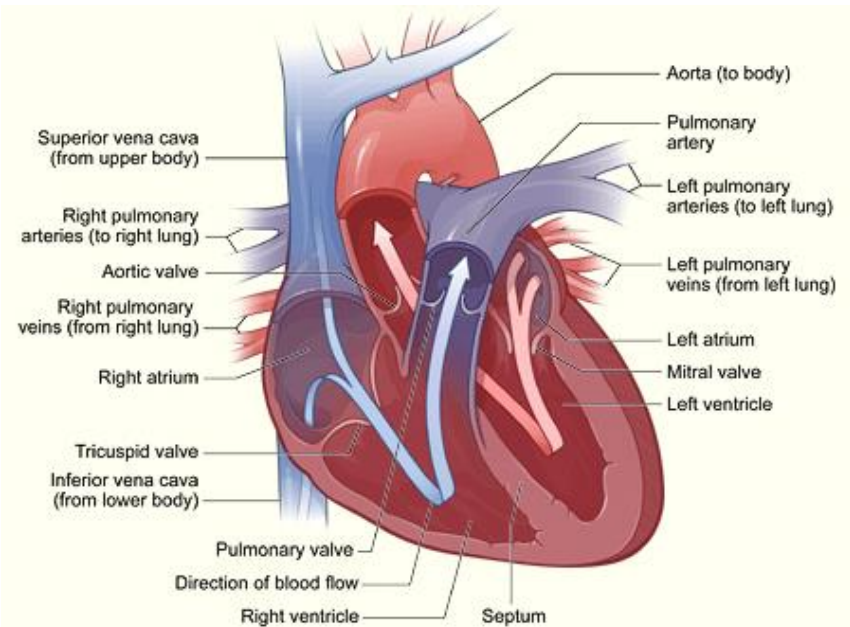
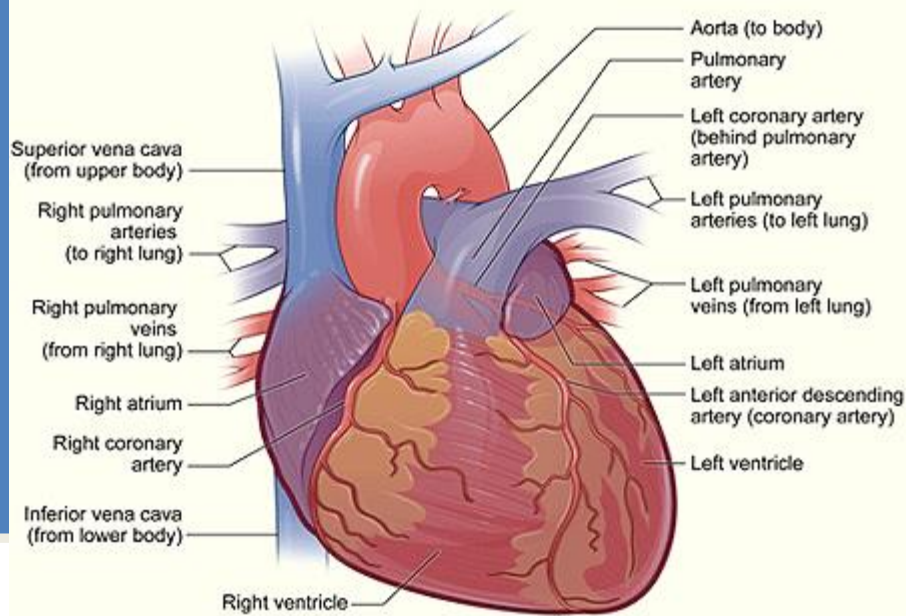


Elementi KVS – srce, sistemski i plućni krvotok.



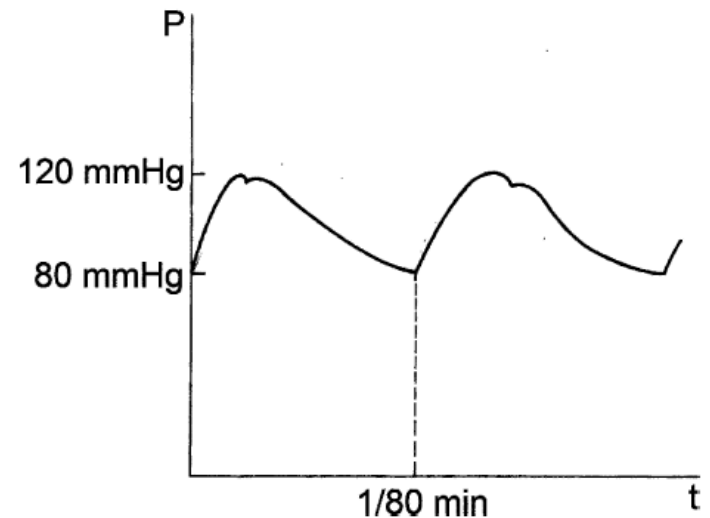
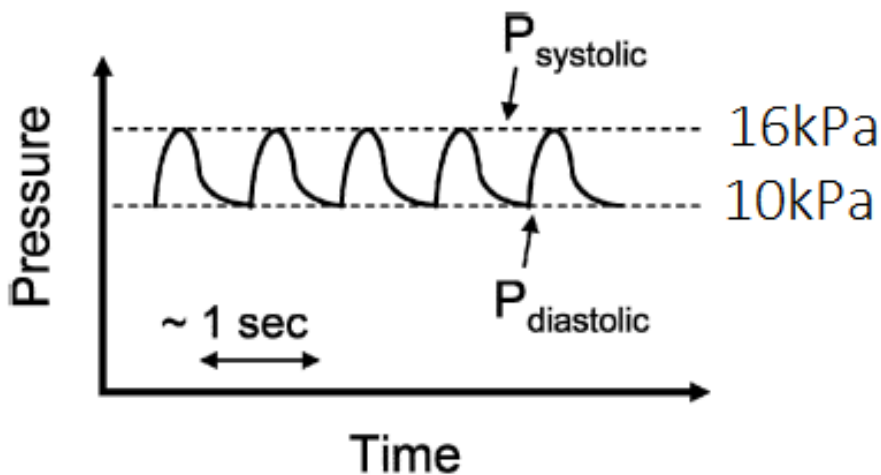
Promena pritiska u aorti, levom atrijumu i ventrikulu (a) i plućnoj arteriji, desnom atrijumu i ventrikulu (b) u toku jednog srčanog ciklusa; c je fonogram.

SPOLJAŠNJA I UNUTRAŠNJA STRUKTURA SRCA



Protok u elastičnoj cevi

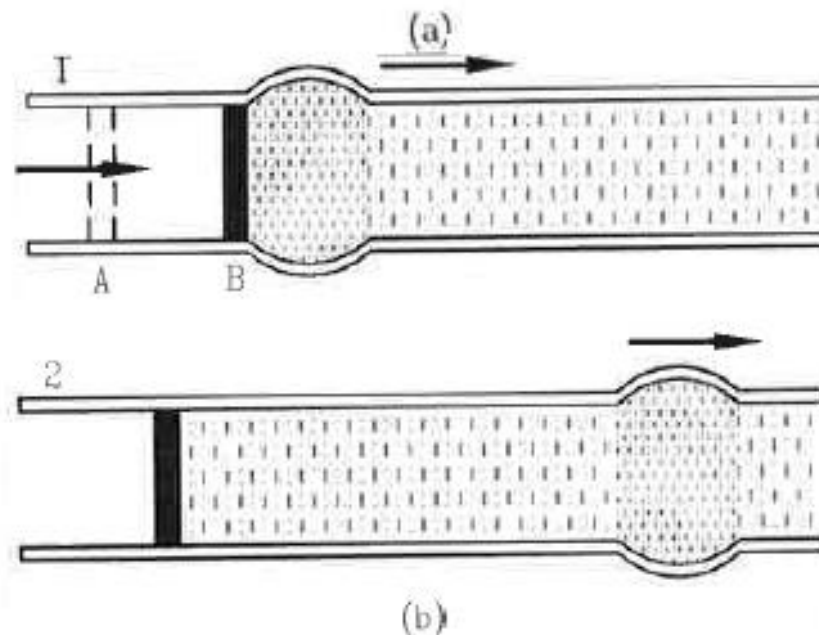
- Zbog periodičnog rada srčanog mišića protok krvi kroz arterije i arteriole ima pulsni karakter.
- U arterijskom sistemu mlade zdrave osobe pritisak pulsa varira od 16 kPa (*sistolni*) do 10.5 kPa (*dijastolni*).
- Na pritisak utiču dva osnovna faktora: mehanički rad srca i elastičnost krvnih sudova.



Pulsni talas u elastičnoj cevi

kvalitativna analiza

- Ako se u elastičnoj cevi ispunjenoj tečnošću naglo pomeri klip iz položaja A u položaj B, pritisk u cevi, dejstvujući na zidove cevi, izazvaće njihovo rastezanje (širenje).
- Pritisak u cevi je znatno niži u poređenju sa cevi sa krutim zidovima i brzina prostiranja pulsnoг talasa je znatno niža.



pulsni talas kroz eleastičnu cev: kinetička i potencijalna energija

- Deo kinetičke energije pulsnog talasa transformiše se u potencijalnu energiju elastične deformacije zidova suda.

$$E_k \rightarrow E_p \rightarrow E_k$$

- Dok traje kontrakcija ventrikula pulsni talas prođe kroz celo arterijsko stablo i svi krvni sudovi su rastegnuti.
- Zatvaranjem srčanog zaliska između ventrikula i aorte prestaje dejstvo kontrakcije srčanog mišića, elastični krvni sudovi se spontano skupljaju pri čemu se njihova E_p transformiše u E_k krvi i pomaže njenom vraćanju u desni atrijum srca.

Jedan numerički primer

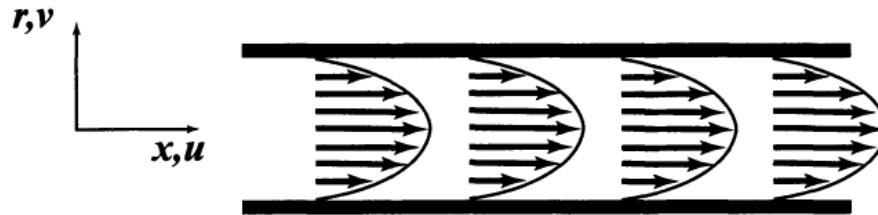
- Deo kinetičke energije pulsno talasa transformiše se u potencijalnu energiju elastične deformacije zidova suda.
 - Krv se kreće kao pulsni talas brzinom 5 do 10 m/s. Dužina arterijskog stabla iznosi najviše 1,4 m pa pulsni talas stiže do kraja arterijskog stabla u vremenu $t=s/v=1,4 \text{ m}/5\text{m/s}=0,3 \text{ s}$ Ovo vreme od 0,3 s odgovara trajanju sistole.

Jedan zaključak

- Dok traje kontrakcija ventrikula pulsni talas pređe kroz celo arterijsko stablo i svi krvni sudovi su rastegnuti.
- Zatvaranjem srčanog zaliska između ventrikula i aorte prestaje dejstvo kontrakcije ventrikula, elastični krvni sudovi se spontano skupljaju, pri čemu se njihova potencijalna energija transformiše u kinetičku energiju krvi i pomaže njenom vraćanju u desni atrijum srca.

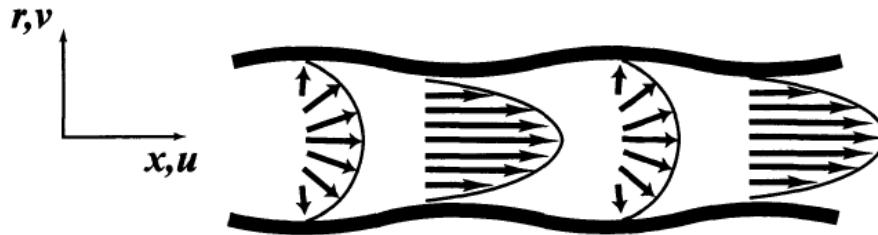
Pulsni talas u elastičnoj cevi

modelovanje



$$u = u(r, t), \quad v = 0$$

Kroz usku cev sa krutim zidovima, fluid se kreće u slojevima koji su u obliku koncentričnih cilindara. Prvi sloj do zida cevi se ne kreće, dok sledeći slojevi imaju sve veću brzinu. Maksimalnu brzinu ima sloj duž ose cevi.



$$u = u(x, r, t), \quad v = v(x, r, t)$$

U elastičnoj cevi tečnost se kreće u obliku pulsni talasa. Brzina tečnosti duž ose cevi je u , a radijalna brzina je v .

Osnovne jednačine za pulsni talas

- Navier-Stoks-ove jednačine kretanja viskozne tečnosti

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0$$

- Zbog kretanja zida cev (elastičnog istezanja), osim brzine u duž ose cevi, tečnost ima i radijalnu brzinu v .
- Obe brzine u i v su funkcije od x , r i t (r je radijalna koordinata).

Jedna aproksimacija

- pretpostavka: dužina cevi L mnogo veća od radijusa cevi a (long-wave approximation), i talasna brzina c_0 mnogo veća od srednje brzine tečnosti u cevi u ; tada sistem postaje:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0$$

- Ovo je sistem, od tri parcijalne dif. jednačine za tri nepoznate:
 - $u(x,r,t)$
 - $v(x,r,t)$
 - $p(x,r,t)$

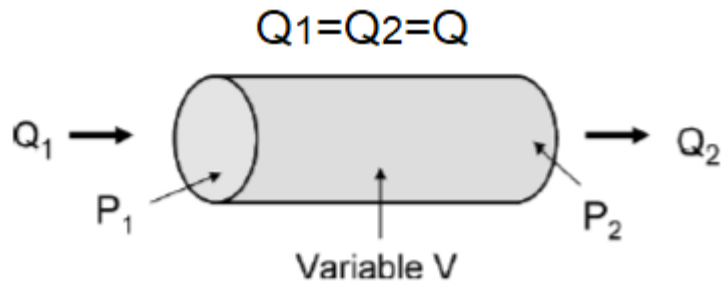
Brzina pulsnog talasa

- Brzina pulsnog talasa u elastičnoj cevi zavisi od elastičnosti zidova cevi.
- Ako je debljina zida cevi mala u poređenju sa radijusom cevi, i ako se efekat viskoznosti može zanemariti, talasna brzina je data forormulom

$$c_0 = \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}}$$

- E je Young-ov modul elastičnosti zida cevi a h je debljina zida cevi, d je prečnik cevi a ρ konstantna gustina tečnosti.

Kretanje zida cevi - istežanje

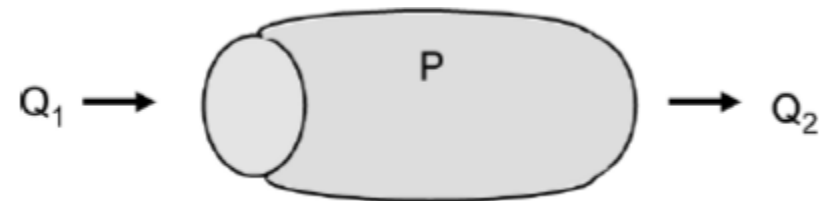
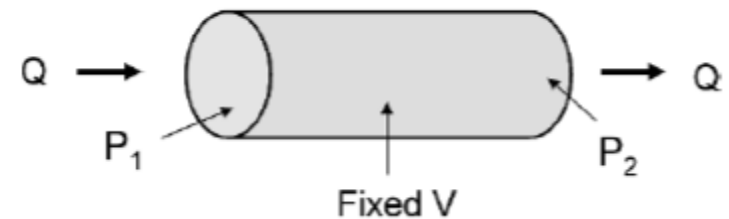


$$P_1 - P_2 = R_{\text{flow}} Q$$

$$Q = \frac{1}{R_{\text{flow}}} (P_1 - P_2)$$

$$R_{\text{flow}} = 8\eta L / \pi r^4$$

$$V(P) = C_{\text{flow}} (P - P_{\text{ext}}) = C_{\text{flow}} P,$$

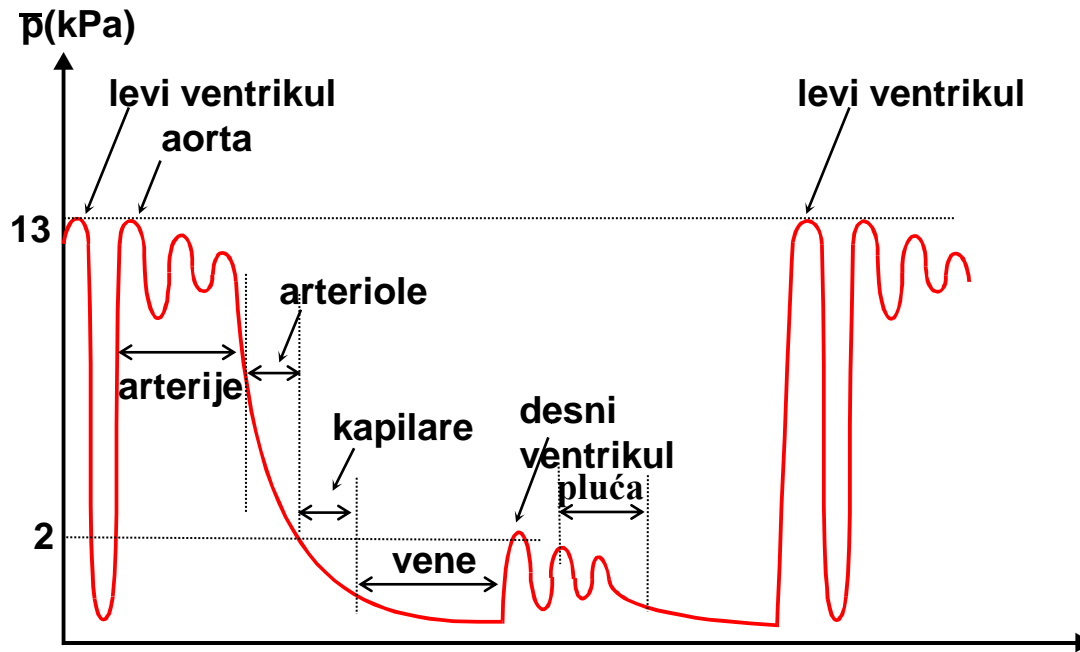


$$V(P) = V_d + C_{\text{flow}} P.$$

$$r(P) = r_d + \frac{C'_{\text{flow}}}{2} P,$$

Mehanički rad srca

Udarni volumen srca iznosi $V = 70 - 80$ ml i prolazi kroz oba krvotoka istovremeno.



Promena pritiska krvi duž krvnog stabla.

Rad i snaga srca – kvalitativna analiza

- Rad i snaga srca. Srce svojim mehaničkim kontrakcijama mora da generiše energiju koja se troši na nekoliko načina:
 1. Rad na prebacivanju 70 ml krvi od levog ventrikula do desnog atrijuma kroz sistemski krvotok i od desnog ventrikula do levog atrijuma kroz pulmonalni krvotok . Rad se izračunava kao proizvod srednjeg pritiska u ventrikulu i zapremine udarnog volumena srca.
 2. Rad na prebacivanju krvi iz atrijuma u ventrikule (ta energija je mala pa se može zanemariti)
 3. Kinetička energija toka krvi; ova energija je približno ista u oba krvotoka.

proračun

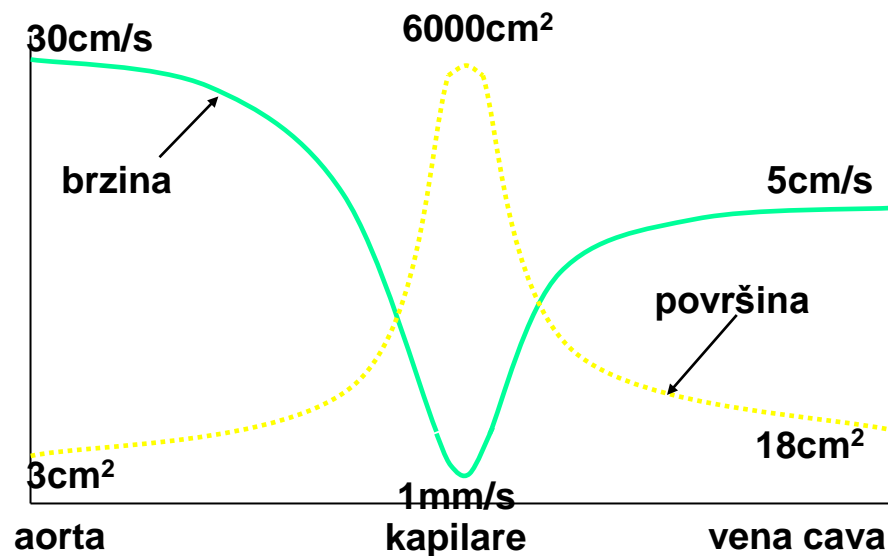
- Imajući u vidu da je rad desnog ventrikula oko 7 puta manji u odnosu na rad levog ventrikula, srednja brzina krvi 0.3 m/s, gustina krvi $1.07 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, mehanički rad A srca u toku jednog ciklusa biće:

$$A = p_L \cdot V + \frac{p_L \cdot V}{7} + \left(\frac{\rho V v^2}{2} \right)_L + \left(\frac{\rho V v^2}{2} \right)_D = 1,05 \text{ J}$$

$$P = \frac{A}{T} = \frac{1,05 \text{ J}}{(6/7) \text{ s}} = 1,2 \text{ W}$$

Brzina proticanja krvi kroz krvne sudove

- Za brzinu su date srednje vrednosti. S obzirom na pulsni karakter krvotoka, brzina u aorti, na primer, varira u toku jednog srčanog ciklusa od $0 - 0,5 \text{ ms}^{-1}$. Kritična brzina krvi u aorti iznosi $0,4 \text{ ms}^{-1}$, što znači da će u toku trajanja sistole u jednom delu kretanje krvi u aorti biti turbulentno.



Promena brzine krvi duž krvnog stabla

Karakteristike protoka kroz kapilare

Najmanji krvni sudovi su kapilare (dijametar $\sim 20 \mu\text{m}$).

Njihov ukupni poprečni pre-sek je ogroman - oko 6000 cm^2 jer ih ima više miliona.

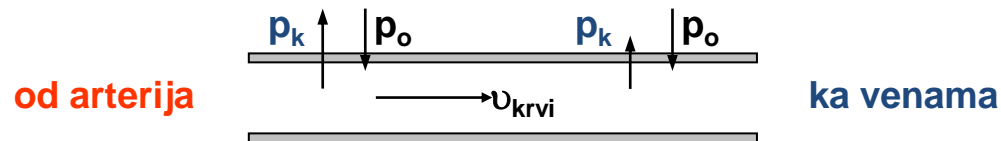
Na preseku aktivnog mišića kapilara je oko $190/\text{mm}^2$.

U 1 kg mišićne mase ukupna dužina kapilara iznosi oko 190 km, a površina zidova, kroz koje se odvija razmena materije, oko 12 m^2 .

Na taj način su ćelije mišića u dobrom kontaktu sa kapilarama. U srčanom mišiću je skoro svaka ćelija u kontaktu sa kapilarom

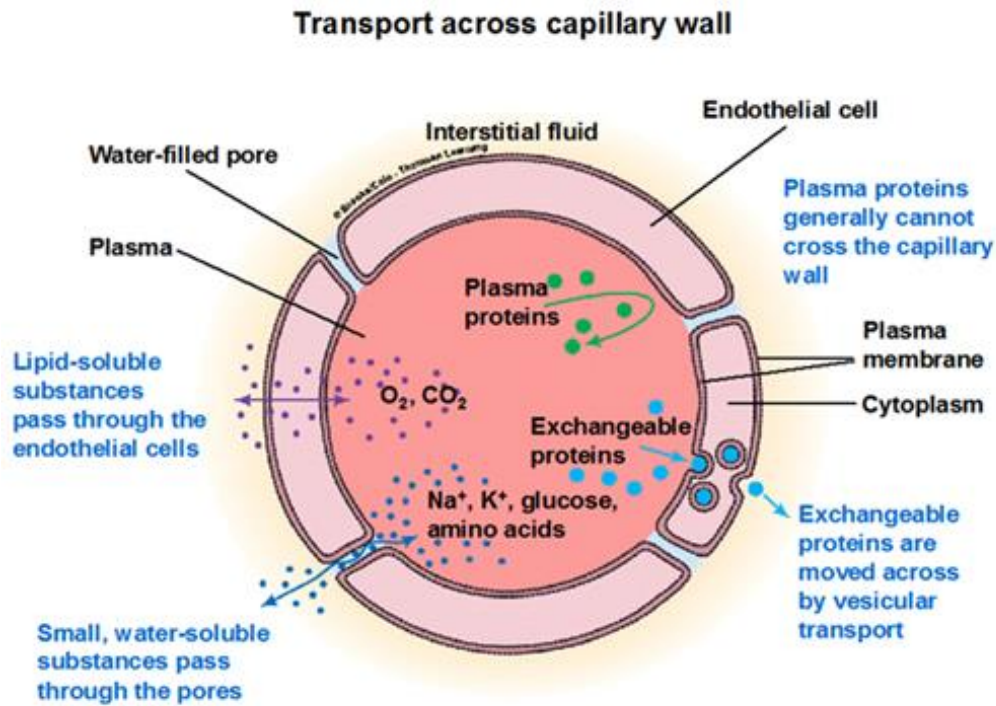
Karakteristike protoka kroz kapilare

- Osmotski pritisak p_o je oko 3 kPa (20 mmHg), p_k vrednost menja od 3,3 kPa (25 mmHg) na arterijskom kraju, do 1,3 kPa (10 mmHg) na venskom kraju.

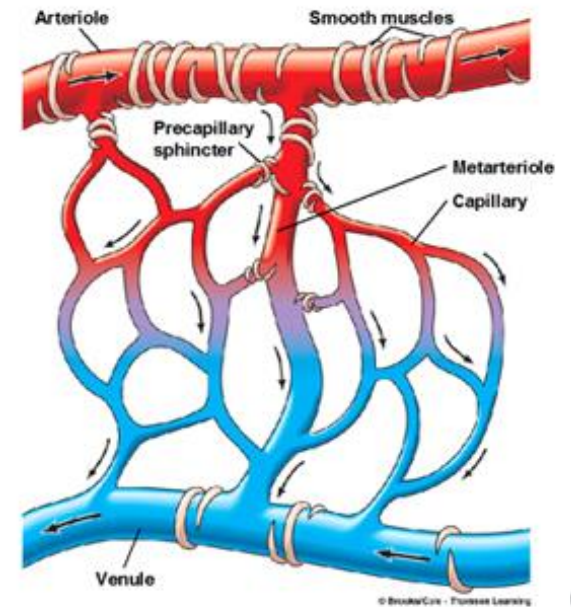


Simultano dejstvo krvnog i osmotskog pritiska duž kapilare.

Karakteristike protoka krvi kroz kapilare



Sherwood Figure 10-18b



Sherwood Figure 10-19

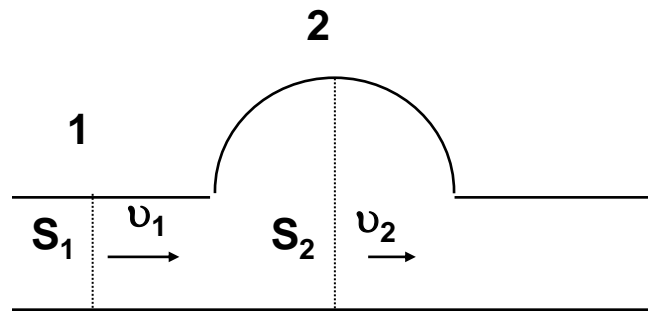
Fig. 10-18, p. 356

Pitanja i zadaci

- ▶ Izvući odgovore na sva pitanja sa ove prezentacije koristeći se sadržajima sa predavanja.
- ▶ Naučiti odgovore na postavljena pitanja.
- ▶ Ukoliko ima teškoća u pripremi ispita, konsultacije su putem *Zoom* aplikacije, i/ili putem *emaila*, ili *Skype* sistema (moj *Skype* nalog: kovac_bb).
- ▶ Ispitni test će sadržati određeni broj pitanja sa ove prezentacije.

Pitanje 1

- Skicirati jednu strujnu cev i napisati jednačinu kontinuiteta i Bernulijevu jednačinu.
- Primenom jednačine kontinuiteta i Bernulijeve jednačine analizirati dejstvo pritiska krvi na aneurizam. Koji je zaključak?

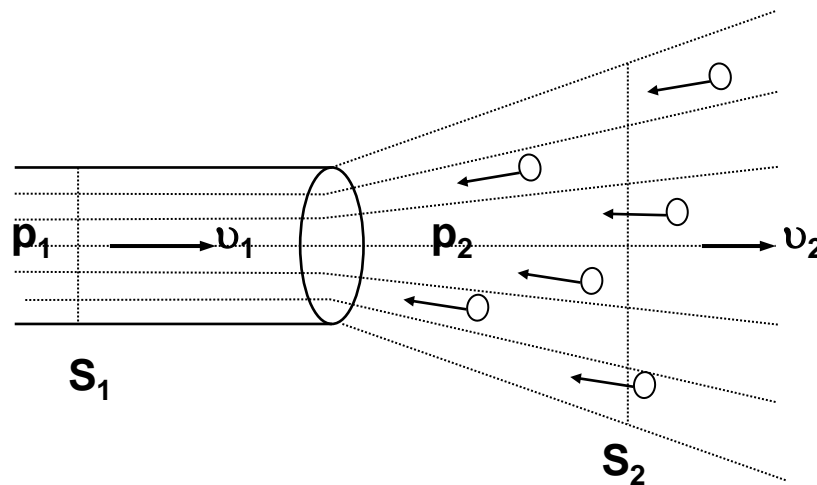


$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$v_2 = (S_1/S_2) v_1$$

Pitanje 2

- Napisati jednačinu kontinuiteta i Bernulijevu jednačinu.
- Primenom ovih jednačina analizirati mehanizam formiranja mehura vazduha u otvorenom krvnom sudu.



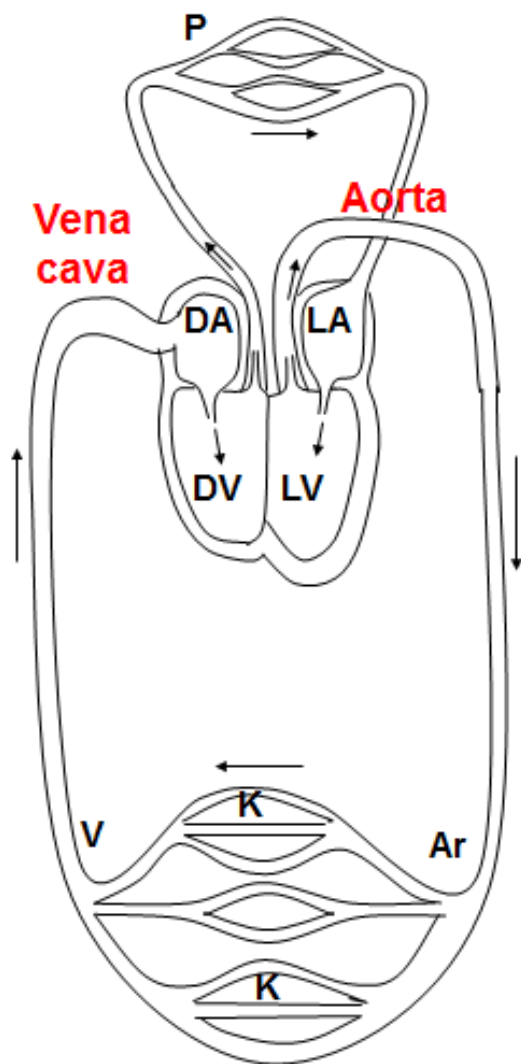
Pitanje 3

- Skicirati kretanje viskozne tečnosti kroz usku cev i napisati formulu za protok viskozne tečnosti (Poazejev zakon).
- Šta možete reći o viskoznosti disperzionih sredina i efektu zida pri proticanju krvi kroz krvne sudove.

Pitanje 4

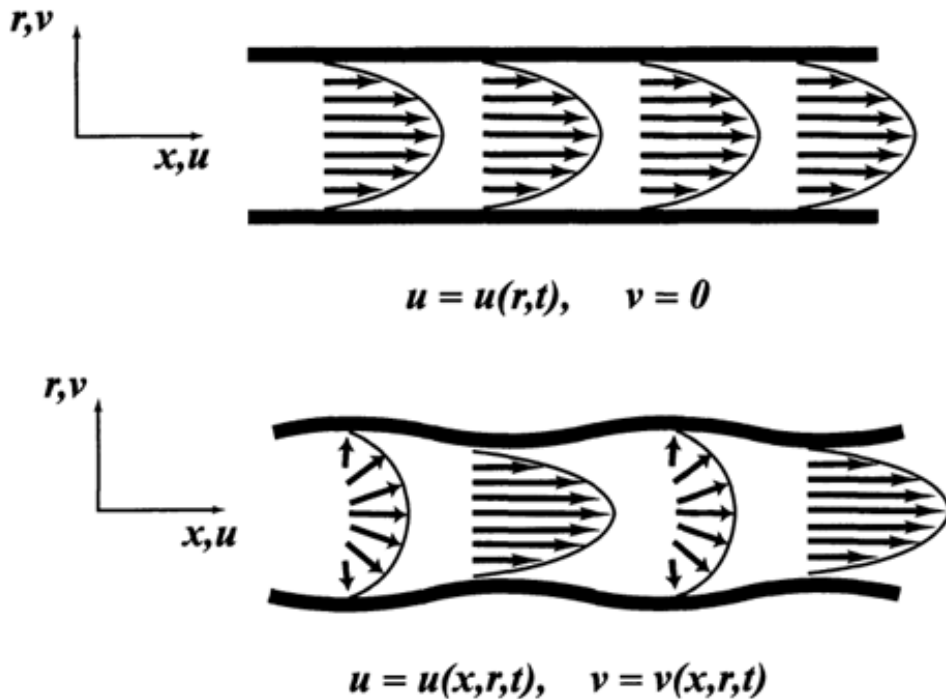
- Koja je razlika između laminarnog i turbulentnog proticanja krvi kroz krvne sudove?
- Skicirati zavisnost protoka fluida kroz cev od razlike pritisaka na njenim krajevima na primeru proticanja krvi kroz normalnu arteriju i kroz arteriju koja je delimično začepljena naslagom fibroznog tkiva.

Pitanje 5



- Skicirati model – elemente KVS čoveka (srce, sistemski i plućni krvotok) i naznačiti vrednosti pritisaka koji se razvijaju u pojedinim delovima srca pri proticanju krvi kroz KVS. (Prikazana skica treba da se zna).

Pitanje 6



- Objasniti karakter pulsnih talasa kroz elastične cevi (kvalitativna analiza, i analiza sa aspekta energije).

Pitanje 7

- Rad i snaga srca – kvalitativna analiza.
- Imajući u vidu da je rad desnog ventrikula oko 7 puta manji u odnosu na rad levog ventrikula, srednja brzina krvi 0.3 m/s, gustina krvi $1.07 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, izračunati mehanički rad srca u toku jednog ciklusa.

Pitanje 8

- 8.1. Ukoliko se pri laminarnom kretanju brzina fluida smanji 2 puta, šta će se desiti sa kretanjem fluida? ($Re < 2300$ laminarno kretanje)
- 8.2 Ako se krvni sud poprečnog preseka 1 cm^2 i srednje brzine proticanja krvi v_1 grana na dva krvna suda ukupne površine poprečnog preseka $2,4 \text{ cm}^2$, brzina krvi u granama je:
- 8.3. Ukoliko se pri turbulentnom kretanju brzina fluida poveća 2 puta, a prečnik cevi smanji 2 puta, šta će se desiti sa kretanjem fluida?
- 8.4. Odrediti brzine krvi usled protoka od $140 \text{ cm}^3/\text{s}$ u krvnim sudovima prečnika (dijametra) $D_1 = 1,12 \text{ cm}$ i $D_2 = 2,24 \text{ cm}$.
- 8.5. Ukoliko se pri konstantnom intenzitetu protoka krvi poluprečnik krvnog suda smanji 2 puta, šta će se desiti sa brzinom protoka krvi?
- 8.6. Ukoliko se poluprečnik cevi $r_1 = 1 \text{ mm}$ poveća na $r_2 = 1,2 \text{ mm}$ intenzitet protoka fluida će se:
- 8.7. Ukoliko se poluprečnik cevi poveća 2 puta, šta će biti sa otporom cevi?

Pitanje 9

- 9.1. Ukoliko se poluprečnik cevi poveća 3 puta, pri konstantnom gradijentu pritiska šta će biti sa ukupnim protokom?
- 9.2. Ukoliko se pri konstantnom intenzitetu protoka krvi poprečni presek krvnog suda smanji 3 puta, šta će se desiti sa brzinom krvi?
- 9.3. Ukoliko se pri konstantnom intenzitetu protoka krvi poluprečnik krvnog suda smanji 6 puta, šta će se desiti sa brzinom protoka krvi?